

# Aantrekking en afstoting

Classical mechanics since Newton<sup>a</sup> reads (with units, expressed without differentials):

Speed 'v' is a traveled distance 's' divided by the required time 't' (m/sec):  $v=s/t$ .  
Acceleration 'a' is v, again divided by the time t, in order to reach that speed (m/sec<sup>2</sup>):  $a=s/t^2$ .  
Force 'F' is the acceleration a, times the accelerated mass 'm' (kg\*m/sec<sup>2</sup>, newton, N):  $F(N)=m*a$ .  
Energy<sup>b</sup> 'E' is a force F exerted on a mass m over a distance s (joule, J):  $E(J)=m*v^2$

Twee massa's van 1kg ( $m_1$  en  $m_2$ ) met  $s=1$  meter afstand tussen hun zwaartepunten trekken elkaar aan met ongeveer 0,0000000000667428newton (N). Dat getal ( $6,67428*10^{-11}$ ) wordt gewoonlijk afgekort als G in de zwaartekrachtformule van Newton(1687)<sup>d</sup>:  $F=G*m_1*m_2/s^2$ . Daaruit volgt ook de onderlinge zwaartekracht F voor andere massa's m en zwaartepuntafstanden s dan 1meter of 1kg.

Die kracht is dus groter bij grotere massa's  $m_1$  of  $m_2$  of bij een kleinere afstand s.

Zo trekken de aarde en ik (75kg) elkaar aan met  $F=G*aardmassa*75/aardstraal^2=735,15$ newton.<sup>e</sup>

Als ik van een springplank spring, dan zet die kracht natuurlijk voornamelijk *mijn* veel kleinere massa in beweging met een versnelling  $a=F/m=735,15/75=9,8$  (meter/seconde<sup>2</sup>), want *de aarde* krijgt van mij een verwaarloosbare versnelling  $a=735,15/5.9742*10^{24}=0,000000000000000000000123$  m/sec.

Coulomb(1785)<sup>f</sup> constateerde analoog aan Newton's zwaartekrachtformule dat twee tegengestelde (+ en -) *elektrische ladingen*  $Q_1$  en  $Q_2$  elkaar aantrekken met een kracht, evenredig met het product van beide (absoluut, dus zonder minteken:  $|Q_1|$  en  $|Q_2|$ ) en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand s. Dit resulteerde in de analoge 'Wet van Coulomb':  $F=k*|Q_1|*|Q_2|/s^2$ . In vacuüm is  $k\approx 9*10^9$ .<sup>g</sup> Als beide ladingen positief (of negatief) zijn, dan geldt dat ook voor hun onderling *afstotende* kracht.

De kleinste lading is de 'elementaire lading' van een electron (-) of proton (+). Als een elektron gezien kan worden als een kleine puntmassa, dan trekken twee aanéengesloten electronen elkaar aan met een zwaartekracht van  $F=G*m_1*m_2/s^2 \approx 7*10^{-42}$  newton, maar door hun lading stoten ze elkaar ook af met een kracht van maar liefst  $F=k*|Q_1|*|Q_2|/s^2 \approx 7$  newton.<sup>h</sup> Daarbij valt hun zwaartekracht dus in het niet.

Positief geladen protonen in de kern van een atoom trekken de daaromheen cirkelende negatieve electronen door hun lading *aan*, maar deze worden door hun middelpuntvliedende kracht op afstand gehouden. In de kern *stoten* twee +protonen elkaar onderling *af* met een vergelijkbare kracht, maar die valt bij zo'n kleine afstand s weer in het niet bij een derde 'fundamentele natuurkracht': de 'sterke kernkracht'. Daarbij moet je namelijk niet rekenen met  $/s^2$ , maar met  $/s^7$ . Die kracht voorkomt dat de kern explodeert. De vierde natuurkracht ('zwakke kernkracht') laat ik buiten beschouwing.<sup>i</sup>

Een coulomb (C) is de ladingseenheid van 624 1509 074 460 762 607,776 ( $\approx 6,24*10^{18}$ ) elektronen.

Twee ladingen Q van 1C stoten elkaar bij 1meter zwaartepuntsafstand af met  $F=k\approx 9*10^9$ newton!

1C is dus een erg grote lading, zodat men in de praktijk vaak met picocoulombs ( $1pC=10^{-12}C$ ) rekent.

<sup>a</sup> Newton(1687)The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy. Preceded by A Guide to Newton's Principia, by I. Bernard Cohen(Berkeley 1999)University of California Press ISBN 0-520-08816-6 ISBN 0-520-08817-4Newton(1687)Philosophiae naturalis principia Mathematica(London)

<sup>b</sup> If you add up all indivisible small velocities  $dv$  from 0 to the final velocity  $v_e$ , and you multiply that with the m of one moved mass:  $\int_0^{v_e} mv \cdot dv = \frac{1}{2}mv_e^2$ , then you have calculated the kinetic energy E of that mass m with speed  $v_e$ . However, if you push a car to that speed, then the ground surface also undergoes the same force in the opposite direction. This must bring about an immeasurably small movement of the earth 'at rest'. That 'reaction mass' then receives the same kinetic energy in opposite direction. That  $\frac{1}{2}mv^2$  is another part of your work: in total  $E=mv^2$ . Until here Newton(1687), but Lorenz(1899) and Einstein(1905) would add a very little increase of the masses  $\Delta m$  in the formula, according to  $E=mc^2$  or  $\Delta m=E/c^2$ , where  $c=300000km/sec$  (speed of light).

<sup>c</sup> Ik zal deze E voortaan met zijn eenheid E(J) aanduiden om hem te onderscheiden van een symbool voor elektrische veldsterkte E(N/C).

<sup>d</sup> Newton(1687) Propositie 75, stelling 35: p.956

<sup>e</sup> De massa  $m_1$  van de aarde= $5,9742*10^{24}$  kg, zijn straal= $6378000$ m. Mijn *massa*  $m_2$  van 75kg zorgt dus met de aardversnelling  $a=9,8$  voor een (zwaarte)kracht ('gewicht') van  $m*a=9,8*75=735,15$ newton.

<sup>f</sup> Coulomb(1785) Second mémoire sur l'électricité et le magnétisme ()Histoire de l'Académie Royale des Sciences, pages 578-611, p597

<sup>g</sup> Voor wie het precies wil weten: de 'constante van Coulomb'  $k=8.9876*10^9Nm^2C^{-2}$ , maar daarover zijn we nog niet uitgepraat.

<sup>h</sup> Ik heb voor de onderlinge zwaartepuntsafstand tussen aanéengesloten electronen  $s\approx 5,6*10^{-15}$  meter en dus  $1/s^2=3,1*10^{28}$  aangenomen.

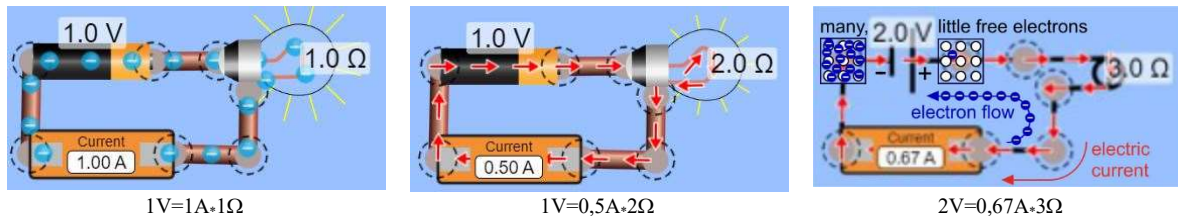
Daardoor wordt  $F\approx 9*10^9*1,6*10^{-19}|*1,6*10^{-19}|*3,1*10^{28}\approx 7N$  zo groot.

<sup>i</sup> Zie [https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental\\_interaction](https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_interaction)

Hiermee zijn we aangekomen op de schaal van ons dagelijks gebruik van elektrische *stroom*. Dat is het aantal coulombs dat per seconde (ampère,  $A=C/sec$ ) door een elektriciteitsdraad stroomt. Die stroom komt tot stand door een 'spanning' tussen beide draadeinden (uitgedrukt in volt  $V=J/C$ , potentiële energie), maar de draad verzet zich daartegen met een weerstand (uitgedrukt in ohm,  $\Omega$ ).

Deze eenheden verhouden zich als  $V=A*\Omega$ . Hun *hoeveelheid* (de spanning  $U$  in volts, de stroom  $I$  in ampères en de weerstand  $R$  in ohms) levert de wet van Ohm<sup>a</sup>:  $U=I*R$ .

Onderstaande figuur is een voorbeeld van de wet van Ohm in een zaklamp, met oplopende weerstand  $R(\Omega)$  en verschillende waarden voor  $U(V)$  en  $I(A)$  en die alle beantwoorden aan deze wet.



*De wet van Ohm in de stroomkring van een zaklamp<sup>b</sup>*

De traditioneel in elektrische schakelschema's weergegeven stroomrichting is overigens tegengesteld aan de later gebleken richting waarin de electronen in werkelijkheid stromen (hier tegen de klok in).

De weerstand  $R(\Omega)$  verschilt per materiaal en temperatuur. Zo is de 'soortelijke weerstand'  $sw$  van koper bij  $20^{\circ}C$ :  $1,7*10^{-8} \Omega*m^2/m$ . Een koperdraad van 1m met een doorsnede van  $10^{-6}m^2$  ( $1mm^2$ ) heeft dus een weerstand  $R=sw*lengte/doorsnede=1,7*10^{-2}=0,017\Omega$ . Mijn zwakstroom gloeilampje meet  $2 \Omega$ . Een draad om piepschuim te snijden hoeft niet te gloeien en moet minder heet worden, maar over een grotere afstand. Je moet dan 'weerstandsdraad' van wel  $5,65 \Omega$  per meter bij  $20^{\circ}C$  kopen.

Dat is voor 20cm  $1,13 \Omega$ , maar die temperatuurgevoelige weerstand loopt op tot  $1,5 \Omega$  bij  $1000^{\circ}C$ .

De zaklamp produceert twee vormen van *energie*: licht en warmte. Energie *per seconde* is *vermogen*  $P$  (uitgedrukt in watt,  $W$ ). In een stroomkring is  $P(watt)=U(volt)*I(ampère)$ . Een mens in rust verbruikt ongeveer 100watt, maar 12km/uur hardlopen kost 1000watt (1kilowatt,  $kW$ ). Als je dat een uur volhoudt, dan heb je 1kilowattuur ( $kWh$ ) verbruikt. Dat is  $1000*60*60$  wattseconden.

Eén wattseconde ( $W*s=J$ ) is geen vermogen meer, maar energie,  $E(J)$ .

Een LED-lampje van 1 watt een jaar laten branden kost een wattjaar:  $365*24*60*60=31536000J$ . Dat is toevallig vrijwel gelijk aan de energie-inhoud van een  $m^3$  aardgas, een kilo kolen of een liter benzine.

De lamp verliest de energie die uit de batterij afkomstig is. Een batterij produceert die spanning met chemische middelen<sup>c</sup>, maar zijn werking kan vergeleken worden met die van een 'condensator'.

Een condensator bewaart de spanning tussen twee gescheiden, verschillend geladen platen, omdat de pluslading van de ene plaat de minlading van de andere aantrekt met de eerder genoemde kracht  $F=k*|Q_1|*|Q_2|/s^2$ . Als je twee platen van  $1x1cm$  (oppervlakte  $A=0,0001m^2$ ) op  $1mm$  afstand ( $s=0,01m$ ) onder 1volt spanning brengt, dan is de 'capaciteit'<sup>d</sup> van de condensator:  $\epsilon*A/s=0,09pF^c$ .

Vermenigvuldig je die capaciteit  $\epsilon*A/s$  met  $U(volt)$  dan ken je ook de lading  $Q=\epsilon*A*U/s=0,09(pC)$ .

Met de lading  $Q$  en de spanning  $U$  ken je vervolgens de opgeslagen energie:  $W=Q*U/2=0,04(pJ)^f$ .

Deze energie-opslag van de condensator  $Q*U/2$  is dus iets anders dan zijn capaciteit  $\epsilon*A/s=0,09(pF)$ .

<sup>a</sup> Ohm(1827)Die galvanische Kette(Berlin)Riemann [https://web.archive.org/web/20060619102047/http://www.mb.fh-  
nuernberg.de/bib/textarchiv/Ohm.Die\\_galvanische\\_Kette.pdf](https://web.archive.org/web/20060619102047/http://www.mb.fh-nuernberg.de/bib/textarchiv/Ohm.Die_galvanische_Kette.pdf) p178

<sup>b</sup> <https://phet.colorado.edu/nl/simulation/circuit-construction-kit-dc>

<sup>c</sup> [https://nl.wikipedia.org/wiki/Batterij\\_\(elektrisch\)](https://nl.wikipedia.org/wiki/Batterij_(elektrisch))

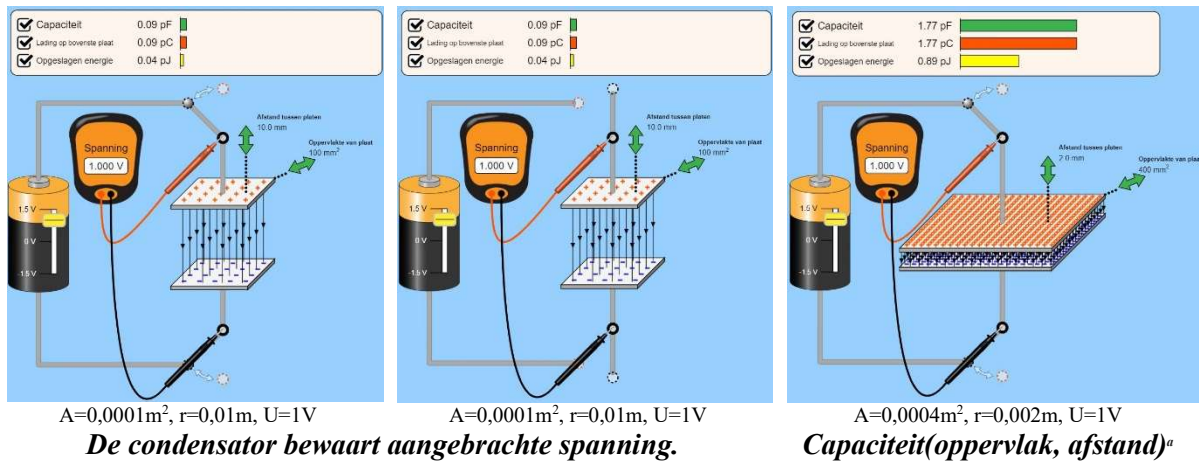
<sup>d</sup> De eenheid van capaciteit is farad ( $F=C/V$ ), maar  $1F$  is een zeer grote capaciteit, zodat ik verder de picofarad= $pF=10^{-12}F$  gebruik.

<sup>e</sup> De 'permittiviteit'  $\epsilon=\epsilon_0*\epsilon_r$  bepaalt de mate waarin niet de elektrische stroom, maar electromagnetische kracht wordt doorgelaten.

Daarin is  $\epsilon_0=8,854187817 * 10^9(N*m^2/C^2)$ .een natuurconstante: de 'elektrische veldconstante bij vacuüm'. Als de ruimte tussen de platen gevuld is met materiaal('diëlektricum'), bijvoorbeeld lucht, dan moet  $\epsilon_0$  met een factor  $\epsilon_r$  worden vermenigvuldigd ('relatieve elektrische veldconstante'). Dat is een voor ieder materiaal specifieke factor. Voor lucht is dat bijvoorbeeld  $1,00056$ , maar voor water  $78,50$ .

We kunnen nu ook de 'constante' van Coulomb  $k$  beter berekenen als  $1/(4*\pi*\epsilon)=8,9876*10^9(N*m^2/C^2)$ , waarin  $\pi$  ('pi')= $3,141592654$ .

<sup>f</sup> Je hoeft voor de capaciteit behalve  $\epsilon$  alleen oppervlak/afstand te weten, maar als je de lading  $Q$  en spanning  $U$  al zou kennen, dan geldt ook capaciteit=lading/spanning= $Q/U$ . Je ziet deze betrekking in de eigen *eenheid*  $F$  terug  $F=coulomb/volt=C/V$ . De lading (coulomb) wordt afgeleid uit de som van elke  $dq$  groei van een lading  $q$  van 0 tot  $Q$  ( $\int_0^Q q dq=Q^2/2$ ). Deel dat door de capaciteit  $Q/U$  en je krijgt  $W=Q*U/2$ .

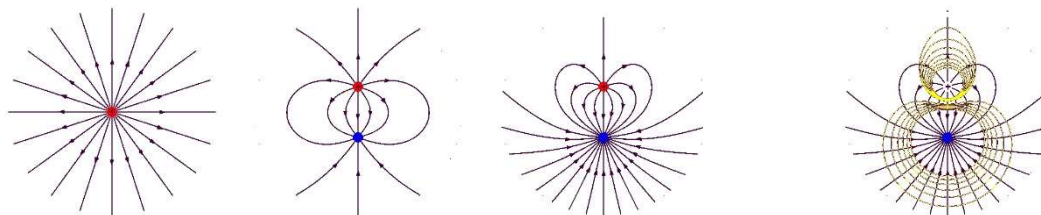


Met  $Q$  kun je nu ook de aantrekkende kracht tussen de platen  $F$  berekenen:  $F=k \cdot Q \cdot Q / s^2 = 0,73 \text{ (pN)}$ .

Die kracht wordt dus groter als de afstand  $s$  in de noemer kleiner wordt (zie de derde figuur), zodat er meer elektronen kunnen worden vastgehouden. Dat geldt ook als de oppervlakte  $A$  van de platen groter wordt. Dan kun je natuurlijk ook meer elektronen vasthouden. In beide gevallen wordt de capaciteit groter en dus ook de lading  $Q$  (=capaciteit\*spanning  $U$ ) en de energie-opslag  $W$  (=  $Q \cdot U / 2$ ).

Tussen de platen heerst een ‘homogeen’ *krachtenveld*  $E_F = F/Q$  dat elke verdwaalde electron naar de *plus*plaat met *minder* vrije electronen trekt. Daarbij wordt vaak met de dichtheid van lijnen (als die goed getekend zijn) de sterkte in newton per coulomb,  $F/Q$  (N/C), van dat veld aangegeven.

Zonder platen bestaat zo’n elektrisch veld ook rondom elke puntlading. Dat veld van één of twee statische puntladingen is niet homogeen (‘heterogeen’) en kleinere ladingen hebben minder invloed.



Een puntlading, twee tegengesteld, kleinere +lading.

**Elektrische krachtlijnen<sup>b</sup>**

**Stroom werkt  $\perp$  een Magnetisch veld<sup>c</sup>**

Bij meer puntladingen moet je een bolvormig volume daaromheen denken. Het volume van een bol is  $\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$  en zijn oppervlak  $4 \cdot \pi \cdot r^2$ . De ‘ladingdichtheid’  $\rho = Q/\text{volume}$ , de ‘flux’  $\Theta = Q/\text{oppervlak}$ . Dat geldt trouwens voor elk volume en zijn gesloten oppervlak. Door het totale oppervlak gaat altijd hetzelfde aantal veldlijnen (flux), zij het gereduceerd door de mate waarin electromagnetische kracht in dat volume ook wordt doorgelaten ( $/\epsilon$ ). Dit is dan de beroemde ‘wet van Gauss’(1813):<sup>c</sup>  $\Theta = Q/\epsilon$ .

Bij *beweging* van de lading (bijvoorbeeld door een draad) ontwikkelt zich ook een *magnetisch* veld. De magnetische veldlijnen staan loodrecht op de elektrische veldlijnen. Faraday(1821,1844)<sup>d</sup> ontdekte dat een staafmagneet volgens deze lijnen om een stroomgeleidende draad draait en omgekeerd een (in geleidend kwik draaiend) stroomgeleidende draad om een magneet (zie **fig**). De eerste ‘elektromotor’!

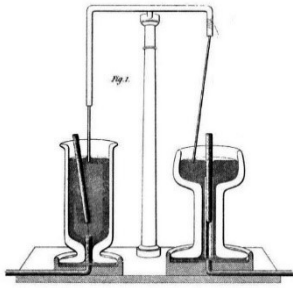
Een stroomgeleidende draad in het homogene magnetische veld binnen een hoefijzermagneet wordt loodrecht op dat veld weggeduwd en bij tijdig omkerende stroomrichting weer aangetrokken. Een electromotor laat dat gebeuren om een as die er tegelijk voor zorgt dat de stroomrichting op het juiste moment omkeert om het duwen in trekken te veranderen met ronddraaien om die as als resultaat.

<sup>a</sup> [https://phet.colorado.edu/sims/html/capacitor-lab-basics/latest/capacitor-lab-basics\\_nl.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/capacitor-lab-basics/latest/capacitor-lab-basics_nl.html)

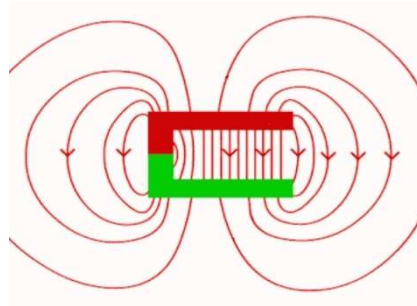
<sup>b</sup> <http://home.kpn.nl/H.Bruning/applets/e-veld/e-veld.htm>

<sup>c</sup> Gauss(1813)Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata(Gauss Werke)vol V p1.

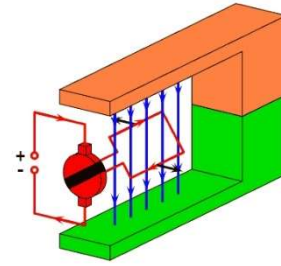
<sup>d</sup> Faraday(1844)Experimental researches in electricity II(London)Taylor



*Faraday's motor(1821)<sup>a</sup>*

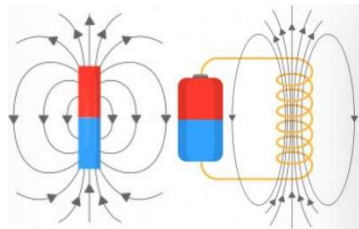


*Hoefijzermagneet<sup>b</sup>*



*Elektromotor<sup>c</sup>*

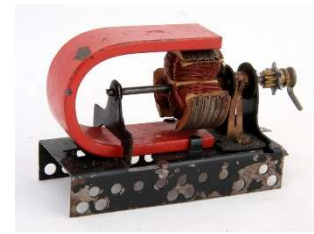
Een stationaire magneet heeft een blijvend magnetisch veld, maar een elektromagneet kan worden uitgezet en bij een omgekeerde stroomrichting ompolen. Daarmee kan het effect van de stroomdraad tussen de polen van een stationaire hoefijzermagneet worden versterkt. Een weekijzeren staaf omwikkeld met draad waarin een lading volgens de wikkeling rechtsom stroomt wordt magnetisch in de richting loodrecht op de stroomrichting, maar poolt om als de lading linksom stroomt.



*Magneet stationair en elektrisch<sup>d</sup>*



*Jedlik's motor(1828)<sup>e</sup>*



*Elektromotor<sup>f</sup>*

Om elektriciteit op te wekken volgt een dynamo<sup>g</sup> het omgekeerde principe. Elektrische stroom kan niet alleen in mechanische arbeid worden omgezet, maar ook omgekeerd. Faraday ontdekte in 1831 elektrische stroom in een geleider die zich door een magnetisch veld beweegt ofwel de stroom in een draad die door een bewegend magnetisch veld wordt opgewekt ('elektromagnetische inductie')<sup>h</sup>.

Een lading van 1coulomb (1C), die zich met een snelheid van 1m/sec loodrecht door een magnetisch veld beweegt, ondervindt een kracht van 1newton (N), als dat veld een veldsterkte B heeft van één 'tesla':  $T=N \cdot \text{sec}/C \cdot \text{m}$ . Omdat  $C/\text{sec}=\text{ampère}(A)$  mag je ook schrijven:  $T=N/A \cdot \text{m}$ .

De homogene magnetische veldsterkte B(T) in een electromagneet wordt groter met de stroom I(A) en met het aantal windingen n, maar kleiner met een grotere lengte l:  $B(T)=4000 \cdot I \cdot n/l$ .

Een elektromotor moet dus behalve zo'n kern zoveel mogelijk windingen op een zo klein mogelijke lengte hebben (n/l zo groot mogelijk).

Die factor 4000 ('permeabiliteit'  $\mu$ )<sup>i</sup> geldt alleen als de draad om een weekijzeren kern gewonden is.

*Rondom* een magneet waaieren de veldlijnen uit (niet meer homogeen, maar heterogeen).

Als die goed getekend zijn, dan kun je de plaatselijke sterkte en -richting aan hun dichtheid aflezen.

Het magnetische veld staat loodrecht op het *elektrische veld*. Het elektrische veld heeft echter bij zwakke gelijkstroom weinig invloed als die door een draad in zijn richting beperkt is. Een electro-

<sup>a</sup> Faraday(1844)Experimental researches in electricity II(London)Taylor Plate IV

<sup>b</sup> <https://sites.google.com/site/elektriciteit1/inhoud/het-magnetisch-veld?tmpl=%2Fsystem%2Fapp%2Ftemplates%2Fprint%2F&showPrintDialog=1>

<sup>c</sup> <http://home.kpn.nl/H.Bruning/applets/elektromotor/elektromotor.htm>

<sup>d</sup> [https--nl.freepik.com-premium-vector-natuurkunde-wetenschap-over-de-beweging-van-magnetische-velden\\_4010627.htm](https--nl.freepik.com-premium-vector-natuurkunde-wetenschap-over-de-beweging-van-magnetische-velden_4010627.htm)

<sup>e</sup> <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7868302>

<sup>f</sup> Een vooroorlogse Trix speelgoedmotor, zie [https://www.pa3esy.nl/zelfbouw/trix/html/trix\\_set.html](https://www.pa3esy.nl/zelfbouw/trix/html/trix_set.html)

<sup>g</sup> De oude naam 'dynamo' is vervangen door 'gelijkstroomgenerator' of 'communator', om hem te onderscheiden van een 'alternator' die wisselstroom opwekt. Beide zijn dan 'elektrische generatoren'.

<sup>h</sup> Dit wordt mooi gedemonstreerd in <http://home.kpn.nl/H.Bruning/applets/inductie/inductie.htm>.

<sup>i</sup> In vacuum ( $\mu_0$ ) is dat 0,00000126 en in lucht niet veel meer, zie [https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability\\_\(electromagnetism\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_(electromagnetism))

motor benut dan alleen de *magnetische* veldsterkte  $B(N \cdot \text{sec}/C \cdot m)$ . Daarin speelt *snelheid*  $v(m/\text{sec})$  een rol, dus  $B = F_b / (Q \cdot v)$ . De *elektrische* veldsterkte  $E_F$  bestaat al bij *stilstaande* lading:  $E_F(N/C) = F_e / Q$ . De elektrische veldlijnen verbinden punten met dezelfde potentële energie ('potentiaal', meetbaar in volt). *Tussen* die lijnen bestaat dus een potentiaalverschil uitgedrukt in volt per meter  $V/m = N/C$ .

In de vrije ruimte wordt de elektrische kracht  $F_e$  (op een lading  $Q$ ) loodrecht daarop echter afgebogen door de magnetische kracht  $F_b$ . De driedimensionale 'resultante'<sup>a</sup>  $F_e + F_b$  heet 'Lorenzkracht'  $F_L$ .<sup>b</sup> Het vectoriëel optellen ('+') vraagt een formulering in termen van hun plaatselijke veldsterkten:  $F_e = Q \cdot E_F$  en  $F_b = Q \cdot (v \times B)$ <sup>c</sup>, zodat  $F_L = Q \cdot (E_F + v \times B)$ .<sup>d</sup>

Anders dan in de elektrische kracht  $F_e$  speelt in de magnetische kracht  $F_b$  de snelheid  $v$  dus een rol. De '×' is de matrixbewerking die het *loodrechte* richtingsverschil tussen beide formuleert.<sup>e</sup>

De wiskundige voorstelling van richting vereist 6 coördinaten in een gegeven 3D coördinatenstelsel. Een vector (een grootte *met* richting) zoals een kracht  $F$  of een snelheid  $v$  wordt weergegeven als een pijl met begin- en eindpunt. Beide hebben 3 coördinaatgetallen  $x$ ,  $y$  en  $z$ , zodat een vector kan worden weergegeven als matrix  $[[x_{\text{begin}}, y_{\text{begin}}, z_{\text{begin}}], [x_{\text{eindpunt}}, y_{\text{eindpunt}}, z_{\text{eindpunt}}]]$ .

Alle coördinaten met hetzelfde getal vermenigvuldigen levert een evenwijdige pijl. Als het beginpunt in de oorsprong ligt ( $[x_{\text{begin}}, y_{\text{begin}}, z_{\text{begin}}] = [0, 0, 0]$ ), dan is de *lengte* van de pijl volgens Pythagoras 3D:  $\sqrt{(x_{\text{eindpunt}}^2 + y_{\text{eindpunt}}^2 + z_{\text{eindpunt}}^2)}$ . Zoniet, dan moet je eerst  $[x_{\text{begin}}, y_{\text{begin}}, z_{\text{begin}}]$  van het eindpunt aftrekken. Deze lengte of grootte van vectoren zoals  $F$  of  $v$  wordt genoteerd als  $\|F\|$  of  $\|v\|$ . Met deze  $x$ ,  $y$  en  $z$  weet je ook 3 richtingen:  $y/x$ ,  $z/y$ ,  $x/z$  en hun resultante.

De wiskundige weergave van kromme lijnen zoals in een *krachtenveld*  $E_F$  en  $B$  vereist hun differentiatie in drie dimensies, opgeteld voor elk ondeelbaar punt van de lijn  $[dx, dy, dz]$ :  $E_F/dx + E_F/dy + E_F/dz$  en  $B/dx + B/dy + B/dz$ , respectievelijk kort weergegeven als  $\nabla E_F$  en  $\nabla B$ . Bij een rondje door alle veldlijnen werkt het veld jouw lading dus optellend mee of tegen.

Maxwell(1865) vatte de hoofdzaken van het elektromagnetisme samen in 20 vergelijkingen met een belangrijke toevoeging. Heaviside(1884) reduceerde dit tot 4 vergelijkingen:<sup>f</sup>

- 1  $\nabla E_F = \rho / \epsilon$  (Gauss, 1813) Opgeteld kost of wint jouw rondje  $\rho / \epsilon$  aan kracht.
- 2  $\nabla B = 0$  (Gauss, 1813) In het magnetisch veld heb je bij elk rondje de wind evenveel mee als tegen.
- 3  $\nabla \times E_F = -\partial B / \partial t$  (Faraday, 1831)<sup>g</sup>  $E_F$  verandert als  $B$  loodrecht daarop beweegt (inductie).
- 4  $\nabla \times B = \mu \cdot \rho \cdot v + \mu \cdot \epsilon \cdot \partial E_F / \partial t$  (Ampère, 1826)  $B$  ontstaat bij een bepaalde 'stroombichtheid'  $J = \rho \cdot v$  en (toevoeging van Maxwell, 1865) bij elke beweging in het elektrische veld  $E_F$ .

<sup>a</sup> De 'resultante' is een vectorsom (een diagonaal in het parallelogram van vectoren). Bij vectoren betekent '+' zo'n 'vectoriële optelling'.

<sup>b</sup> Dit wordt weer mooi gesimuleerd in <http://home.kpn.nl/H.Bruning/applets/lorenzkracht-afbuigen/lorenzkracht-afbuigen.htm>

<sup>c</sup> Een getal *met* richting, een vector, wordt verder **vet** weergegeven.

<sup>d</sup> <https://nl.wikipedia.org/wiki/Lorenzkracht>

<sup>e</sup> Het teken '×' is het 'cross-product' tussen beide richting-dragende vectoren  $v$  en  $B$ .

<sup>f</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations), <https://www.nemokennislink.nl/publicaties/james-clerk-maxwell-de-onopvallende/>

<sup>f</sup>  $dB/dt$ , zou alle variabelen in  $B = F_b / (Q \cdot v)$  afleiden naar  $t$ , maar  $\partial B / \partial t$  is een 'partiële afgeleide' van naar  $t$ , alleen betrokken op snelheid  $v$ .